S1 B2 Correction examen SR

Exercice 1 : une suite récurrente

Soit la suite (u_n) *définie par* $u_0 = \dfrac{1}{2}$ *et* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n}{1+4u_n}$.

On admet que : $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$. *La suite* (u_n) *est donc bien définie (son dénominateur ne s'annule pas).*

1. *Donner la fonction* f *vérifiant* $u_{n+1} = f(u_n)$ *pour tout entier naturel* n.

   $f : x \longmapsto \dfrac{5x}{1+4x}$, définie sur $\mathbb{R}^+$ sans problème.

2. *En supposant que la suite* (u_n) *converge, quelles sont les valeurs possibles de sa limite* ℓ *? Justifier.*

   Supposons que (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$. ℓ vérifie $\ell = f(\ell)$. Or,

   $$\ell = f(\ell) \iff \ell = \frac{5\ell}{1+4\ell} \iff \ell + 4\ell^2 = 5\ell \iff 4\ell^2 - 4\ell = 0 \iff 4\ell(\ell-1) = 0 \iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1$$

   Ainsi, si (u_n) converge, elle tend vers 0 ou 1.

3. *Montrer que la fonction* f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$.

   f est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) = \dfrac{5(1+4x) - 5x \times 4}{(1+4x)^2} = \dfrac{5}{(1+4x)^2}$. On en déduit que :

   $\forall\, x \in \mathbb{R}^+$, $f'(x) > 0$. f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$.

4. *En déduire, par récurrence, que :* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

   Notons $P(n)$: « $0 < u_n < 1$ » la propriété au rang n.

   • $n = 0$ Comme $u_0 = \dfrac{1}{2}$, $0 < u_0 < 1$. $P(0)$ est vraie.

   • Supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$, $P(n)$ est vraie. Ainsi, $0 < u_n < 1$. f étant strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, on a $f(0) < f(u_n) < f(1)$. Comme $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, on en déduit : $0 < u_{n+1} < 1$. Ainsi, $P(n+1)$ est vraie.

   • En conclusion, $P(n)$ est vraie pour tout entier naturel n.

5. *Étudier la monotonie de la suite* (u_n).

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

   $$u_{n+1} - u_n = \frac{5u_n}{1+4u_n} - u_n = \frac{5u_n - u_n(1+4u_n)}{1+4u_n} = \frac{4u_n - 4u_n^2}{1+4u_n} = \frac{4u_n(1-u_n)}{1+4u_n}$$

   or $u_n > 0 \Longrightarrow 1 + 4u_n > 0$ et $4u_n > 0$. De plus, $u_n < 1 \Longrightarrow 0 < 1 - u_n$. Par conséquent, $u_{n+1} - u_n > 0$. La suite est donc (strictement) croissante.

6. *La suite* (u_n) *est-elle convergente ? Si oui, trouver sa limite.*

   (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge. Notons ℓ sa limite. Par question 2., $\ell = 0$ ou 1. Or (u_n) est croissante, d'où $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq u_0 = \dfrac{1}{2}$. Par passage à la limite dans l'inégalité, on en déduit que $\ell \geq \dfrac{1}{2}$. Donc, $\ell = 1$.

Exercice 2 : étude de suites 1

Soit la suite (u_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

1. *Montrer que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes.*

   • Monotonie de (u_{2n}).

   $$\begin{aligned} u_{2n+2} - u_{2n} &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{(-1)^k}{k!} - \sum_{k=0}^{2n} \frac{(-1)^k}{k!} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} \\ &= -\frac{1}{(2n+1)!} + \frac{1}{(2n+2)!} \\ &= -\frac{2n+2}{(2n+2)!} + \frac{1}{(2n+2)!} \\ &= \frac{-2n-1}{(2n+2)!} \leq 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, la suite (u_{2n}) est décroissante.

   • Monotonie de (u_{2n+1}).

   $$\begin{aligned} u_{2n+3} - u_{2n+1} &= \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)!} \\ &= \frac{1}{(2n+2)!} - \frac{1}{(2n+3)!} \\ &= \frac{2n+3}{(2n+3)!} - \frac{1}{(2n+3)!} \\ &= \frac{2n+2}{(2n+3)!} \geq 0 \end{aligned}$$

   Ainsi, la suite (u_{2n+1}) est croissante.

   • De plus, $u_{2n+1} - u_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\frac{1}{(2n+1)!}$. D'où, $\lim_{n\to+\infty} u_{2n+1} - u_{2n} = 0$.

   En conclusion, les deux suites sont adjacentes.

2. *La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.*

   Comme les deux suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont adjacentes, elles convergent vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$. Or, on sait que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers $\ell \implies (u_n)$ converge vers ℓ. La suite (u_n) est donc convergente.

Exercice 3 : étude de suite 2

Soit la suite (u_n) définie par : $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+k}}$.

1. *En encadrant chaque terme de la somme, trouver un encadrement de u_n en fonction de n.*

   On a

   $$n \leq k \leq 2n \implies \sqrt{n+n} \leq \sqrt{n+k} \leq \sqrt{n+2n} \implies \frac{1}{\sqrt{n+2n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{1}{\sqrt{n+n}} \implies \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2n}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+k}} \leq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+n}}$$

Ainsi, en sommant et sachant que la somme a $n+1$ termes, on obtient $(n+1)\times\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+2n}}\leq u_n\leq(n+1)\times\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+n}}$, ce qui donne $\frac{n+1}{\sqrt{3}}\leq u_n\leq\frac{n+1}{\sqrt{2}}$.

2. *Quel est le comportement de cette suite en $+\infty$? Justifier.*

   $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{3}}=+\infty$, donc, par le théorème de comparaison, $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=+\infty$.

Exercice 4 : comparaison de suites

1. *Soient (u_n) et (v_n) deux suites réelles ne s'annulant pas. Rappeler la définition de : $u_n=o(v_n)$ et $u_n\sim v_n$ en $+\infty$.*

$$u_n\sim v_n\iff\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1,\quad\text{et}\quad u_n=o(v_n)\iff\lim_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=0$$

2. *Comparer en $+\infty$ les suites (u_n) et (v_n) suivantes à l'aide des comparateurs de Landau $\sim$ ou $=o(\cdot)$. Vous justifierez proprement.*

   (a) $u_n=-n^3-2n+3$ *et* $v_n=-n^2+6n$.

$$\frac{v_n}{u_n}=\frac{-n^2(1-\frac{6}{n})}{-n^3(1+\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n^3})}=\frac{1-\frac{6}{n}}{n(1+\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n^3})}$$

   Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}1-\frac{6}{n}=1$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}1+\frac{2}{n^2}-\frac{3}{n^3}=1$, on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{v_n}{u_n}=0$. Donc, $v_n=o(u_n)$.

   (b) $u_n=\ln(n)+e^n$ *et* $v_n=e^n+n^{10}$.

$$\frac{u_n}{v_n}=\frac{e^n\left(\frac{\ln(n)}{e^n}+1\right)}{e^n\left(1+\frac{n^{10}}{e^n}\right)}=\frac{\frac{\ln(n)}{e^n}+1}{1+\frac{n^{10}}{e^n}}$$

   Or, par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln(n)}{e^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n^{10}}{e^n}=0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{v_n}=1$ et on conclut : $u_n\sim v_n$ et $v_n\sim u_n$.

3. *Donner un équivalent simple en $+\infty$ de $u_n=4^n-n+2$. Justifiez votre réponse.*

   $\frac{u_n}{4^n}=1-\frac{n}{4^n}+\frac{2}{4^n}=1-\frac{n}{e^{n\ln(4)}}+\frac{2}{4^n}$.

   Par croissance comparée, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{e^{n\ln(4)}}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2}{4^n}=0$ car $\left(4>1\implies\lim\limits_{n\to+\infty}4^n=+\infty\right)$.

   On en déduit donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{u_n}{4^n}=1$, donc $u_n\sim 4^n$.

Exercice 5 : cours

1. *Soient (u_n) une suite et $\ell\in\mathbb{R}$. Rappeler la définition (avec les quantificateurs) de « (u_n) converge vers ℓ ».*

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N},\ \forall\,n\in\mathbb{N},\ (n\geq N\implies|u_n-\ell|<\varepsilon)$$

2. *Énoncer avec soin le théorème des gendarmes.*

   Soient (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites et $\ell\in\mathbb{R}$ telles que : $\exists\,N\in\mathbb{N}$ tel que $\forall\,n\in\mathbb{N}$, $(n\geq N\implies u_n\leq v_n\leq w_n)$.

   Si (u_n) et (w_n) convergent vers ℓ alors (v_n) converge vers ℓ.

3. *Démontrer ce théorème en structurant avec les règles de démonstrations.*

   voir pdf "démonstrations à connaitre".

4. *Application : étudier la limite de* (u_n) *où, pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{\sqrt{n}\cos(e^n)}{n+1}$.

   On a : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ 0 \leq |u_n| \leq \dfrac{\sqrt{n}}{n+1} = \dfrac{\sqrt{n}}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \dfrac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)}$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)} = 0$. Ainsi, par les théorème des gendarmes, $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = 0$. Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$